Analysis 3

09.10.2018
PROF. DR. H. KOCH
DR. F. GMEINEDER
Abgabe: 16.10.2018 in der Vorlesung

universitätbonn

Übungsblatt 1

Aufgabe 1: **8 + 2 = 10 Punkte**

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diejenige Funktion, die durch 1-periodische Fortsetzung der Funktion $h\colon (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$, $h(x) = x$, entsteht.

(a) Entwickeln Sie f in eine 1-periodische Fourierreihe. Stellen Sie Ihr Ergebnis so dar, dass die Fourierreihe nur Sinusterme enthält.

(b) Plotten Sie – etwa mit Hilfe eines Computeralgebrasystems – die ersten vier Partialsummen der in (a) erhaltenen Fourierreihe.

Aufgabe 2: **10 Punkte**

Sei $A := \{x = (x_1, x_2)^\top : x_1, x_2 > 0,\ x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ der Viertelkreis im ersten Quadranten. Bestimmen Sie $m_*(A)$ direkt anhand Definition 2.3.

Aufgabe 3: **5 + 5 = 10 Punkte**

(a) Es sei A ein nicht-entartetes Dreieck im $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie die aus der Schule bekannte Formel: $m_*(A) = \frac{1}{2}ah$, wobei a die Länge einer Grundseite und h die entsprechende Höhe ist.

(b) Sei $r > 0$ und $h > 0$. Es sei $K_{r,h}$ derjenige Kegel im $\mathbb{R}^3$, der als Grundfläche den Kreis $\{(x_1, x_2, x_3)^\top :\ x_1^2 + x_2^2 \leq r^2,\ x_3 = 0\}$ besitzt und die Spitze $(0, 0, h)^\top$. Zeigen Sie (z.B. unter Zuhilfenahme des Cavalierischen Prinzips, das Sie als gegeben voraussetzen dürfen), dass $m_*(K_{r,h}) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ gilt.

Aufgabe 4: **10 Punkte**

Es sei $A \subset \mathbb{R}^d$ und $m_*(A)$ wie in Definition 2.3. Sei weiters $L\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ eine lineare Isometrie, d.h., L ist linear und erfüllt $|Lx - Ly| = |x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$. Zeigen oder widerlegen Sie, ob $m_*(L(A)) = m_*(A)$ gilt. Hierbei ist $L(A) = \{Lx\colon x \in A\}$ das Bild von A unter L.