LÖSUNGEN ZU DEN NICHTBESPROCHENEN AUFGABEN

1. Aufgabe 19

Da ρ Lebesgue-integrierbar ist, ist die Wohldefiniertheit punktweise fast überall zu verstehen. Wir unterscheiden nun zwei Fälle. Entweder $x \notin K$. Dann ist $d := \operatorname{dist}(x, K) > 0$ und somit

$$|u(x)| \leq \frac{1}{d} \int_K \rho(y) \, \mathrm{d}y < \infty,$$

da ρ Lebesgue-integrierbar ist. Oder $x \in K$. Wir schreiben dann

$$\int_K |u(x)| \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{1}_K(x) \mathbb{1}_K(y) \frac{\rho(y)}{|x-y|} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{1}_K(y) \rho(y) \int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{1}_K(x) \frac{1}{|x-y|} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

Nun ist $K = \overline{\mathrm{B}_r(x)}$ in $\overline{\mathrm{B}(x, 2r)}$ enthalten, also

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{1}_K(x) \frac{1}{|x-y|} \, \mathrm{d}x \leq \int_{\mathrm{B}(x,2r)} \frac{1}{|x-y|} \, \mathrm{d}x = \int_{\mathrm{B}(0,2r)} \frac{\mathrm{d}y}{|y|} \leq c \int_0^1 r^2 r^{-1} \, \mathrm{d}r \leq cr^2.$$

Also ist $\int_K |u(x)| \, \mathrm{d}x$. Also muss auch $|u(x)| < \infty$ m^3-fast überall sein, womit der erste Teil folgt. Zum zweiten Teil: u ist genau dann rotationssymmetrisch, falls für alle $x \in \mathrm{B}(x, r)$ und alle $T \in O(3)$ (orthogonale Gruppe im $\mathbb{R}^3$) gilt: $u(Tx) = u(x)$. Hierzu rechnen wir für fast alle $x \in K$ unter Berücksichtigung der Invertierbarkeit von T:

$$u(Tx) = \int_K \frac{\rho(y) \, \mathrm{d}y}{|x-y|} = \int_K \frac{\rho(y)}{|Tx - T(T^{-1}y)|} = (*).$$

Dann benötigen wir, dass orthogonale Abbildungen Isometrien sind. Hier noch einmal zur Wiederholung: Wir nennen einen Endomorphismus $T \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ orthogonal, falls $T^\top T = TT^\top = \mathrm{Id}$. Daraus folgt:

$$1 = \det(\mathrm{Id}) = \det(T^\top T) = \det(T^\top) \det(T) = \det(T)^2.$$

Also $|\det(T)| = 1$. Weiters ist

$$|Tx|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = \langle x, T^\top Tx \rangle = \langle x, x \rangle = |x|^2,$$

und damit sind orthogonale Endomorphismen Isometrien. Wir setzen $z := T^{-1}y$. Dann gilt $\mathrm{d}z = |\det(T^{-1})| \, \mathrm{d}y = \mathrm{d}y$, und T^{-1} ist ein C^1-Diffeomorphismus von $\mathrm{B}(0, r)$ auf $\mathrm{B}(0, r)$. Da $\partial \mathrm{B}_r(0)$ eine Lebesgue-Nullmenge ist, gilt also

$$\begin{aligned}(*) &= \int_{\mathrm{B}_r(0)} \frac{\rho(Tz)}{|Tx - Tz|} \, \mathrm{d}z = \int_{\mathrm{B}_r(0)} \frac{\rho(Tz)}{|x-z|} \, \mathrm{d}z \\ &= \int_{\mathrm{B}_r(0)} \frac{\rho(z)}{|x-z|} \, \mathrm{d}z = u(x).\end{aligned}$$

Hierbei haben wir im letzten Schritt ausgenutzt, dass ∂K eine Lebesgue-Nullmenge ist, und im vorletzten Schritt, dass ρ selber rotationssymmetrisch ist. Damit ist die Aussage vollständig bewiesen. ■

2. Aufgabe 20

Die Parametrisierung haben wir auf einem Übungsblatt der Analysis 2 behandelt. Am schnellsten geht die Volumenberechnung wohl über Cavalieri. Schneiden wir den Torus in der Höhe $h \in [-r, r]$ mit einer zu der $x_1 - x_2$-Ebene parallelen Ebene, so erhalten wir einen zweidimensionalen Annulus. Hat ein Annulus inneren Radius r_1 und äußeren Radius r_2, so erhalten wir für den entsprechenden Flächeninhalt

$$\pi(r_2^2 - r_1^2).$$

Ein Schnitt mit der entsprechenden Ebene in der Höhe h liefert mittels Pythagoras den inneren Radius $r_1(h) = 1 - \sqrt{r^2 - h^2}$ und den äußeren Radius $r_2(h) = 1 + \sqrt{r^2 - h^2}$. Also folgt folt nach Cavalieri für das dreidimensionale Lebesguemaß des angegebenen Torus:

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol} &= 2\int_0^r \pi\Big((1+\sqrt{r^2-h^2})^2 - (1-\sqrt{r^2-h^2})^2\Big)\,\mathrm{d}h \\
&= 2\pi \int_0^r 1 + 2\sqrt{r^2-h^2} + (r^2-h^2) - (1 - 2\sqrt{r^2-h^2} + r^2 - h^2))\,\mathrm{d}r \\
&= 4\pi \int_0^r \sqrt{r^2-h^2}\,\mathrm{d}h \\
&= 4r\pi \int_0^r \sqrt{1-\frac{h^2}{r^2}}\,\mathrm{d}h \\
&= 4\pi r^2 \int_0^1 \sqrt{1-s^2}\,\mathrm{d}s = 4\pi r^2 \frac{\pi}{2} = 2\pi^2 r^2.
\end{aligned}$$

3. Aufgabe 21

$$U := \Big\{(x,y)^\top :\ \frac{1}{2} - x \le \frac{1}{2} \le x + y \le 1 \le 1 + y\Big\}.$$

Insbesondere gilt, falls $(x,y)^\top \in U$, $x, y \ge 0$ und $x + y \in [\frac{1}{2}, 1]$. Setze nun

$$\Phi^{-1}(x,y) := \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{v-u}{2}. \end{cases}$$

Es ist

$$\widetilde{U} := \Phi^{-1}(U) = \{(u,v)^\top :\ v \in [\tfrac{1}{2}, 1],\ u \in [-v, v]\}$$

denn $v = x + y \le 1$, $v \ge \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} - \frac{u+v}{2} \le \frac{1}{2}$ und damit $0 \le u + v$ und somit $-v \le u$. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\int_U f(x,y)\,\mathrm{d}m^2(x,y) &= \int_{\Phi(\widetilde{U})} f(x,y)\,\mathrm{d}m^2(x,y) \\
&= \int_{\widetilde{U}} f(\Phi(x,y))|\det \Phi'(x,y)|\,\mathrm{d}m^2(x,y) \\
&= \frac{1}{2}\int_{\widetilde{U}} \cos\Big(\frac{u}{v}\Big)\,\mathrm{d}m^2(u,v) \\
&= \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{-v}^v \cos\Big(\frac{u}{v}\Big)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
&= \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1 \Big[v\sin(u/v)\Big]_{-v}^v\,\mathrm{d}v \\
&= \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1 (v\sin(v) - v\sin(-1)]\,\mathrm{d}v \\
&= \frac{3}{8}\sin(1).
\end{aligned}$$

4. Aufgabe 22

Sei ohne Einschränkung $a \geq 0$. Mit der Areaformel sehen wir sofort, dass

$$\int_{f((a,b))} \mathrm{d}\mathcal{H}^1 = \int_{(a,b)} \sqrt{|\det((f')^\top f'|}\,\mathrm{d}t =: (*).$$

Damit ist mit

$$f'(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ t \end{pmatrix} \Rightarrow \sqrt{|\det((f')^\top f'|(t)} = |t|\sqrt{9t^2+1}.$$

Damit folgt wegen $a \geq 0$:

$$\begin{aligned}
(*) &= \int_a^b t\sqrt{9t^2+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{18}\int_a^b \underbrace{(18t)}_{=h'(t)}\underbrace{\sqrt{9t^2+1}}_{=g'(h(t))}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{18}\int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g(h(t))\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{1}{18}\frac{2}{3}\sqrt{9t^2+1}^3\right]_a^b
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{27}\left[\sqrt{9b^2+1}^3 - \sqrt{9a^2+1}^3\right],$$

wobei $g(t) = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}$. ■

5. Aufgabe 23

Wir berechnen zuerst $|Df|^2 = \det((Df)(Df)^\top)$. Dies folgt aus der Polarzerlegung. Es ist mit der Coareaformel

$$g|_{f^{-1}(\{y\})} \text{ für } \mathcal{H}^1\text{-fast jedes } y\ \mathcal{H}^{d-1}\text{-integrierbar}$$

und damit

$$\begin{aligned}
\int_{\{f>t\}} g\,\mathrm{d}m^d &= \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{\{f>t\}} \frac{g}{|Df|}|Df|\,\mathrm{d}m^d \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\partial\{f>s\}} \frac{g}{|Df|}\chi_{\{f>t\}}\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{d-1}\,\mathrm{d}\mathcal{H}^1(s) \\
&= \int_t^\infty \int_{\partial\{f>s\}} \frac{g}{|Df|}\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{d-1}\,\mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

und die Aussage folgt. ■